(2)

[This question paper contains 15 printed pages]

2019

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY ★ Kalkaji, New Delhi-19

Your Roll No.	: ....
Sl. No. of Q. Paper	: **9115** **IC**
Unique Paper Code	: 12271202
Name of the Course	: **B.A. (Hons.) Economics - CBCS**
Name of the Paper	: Mathematical Methods for Economics - II
Semester	: II

Time : 3 Hours ***Maximum Marks : 75***

Instructions for Candidates :

परीक्षार्थियों के लिए निर्देश :

(a) Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.

इस प्रश्न-पत्र के प्राप्त होने पर तुरंत शीर्ष पर अपना रोल नंबर लिखें।

(b) Answer may be written either in **English** or in **Hindi**; but the same medium should be used throughout the paper.

इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तर एक ही भाषा में होने चाहिए।

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(c) Answer **all** questions. Choice is available within each questions.

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के भीतर चयन उपलब्ध है।

(d) Use of simple calculator is permitted.

साधारण कैल्कुलेटर प्रयोग करने की अनुमति है।

1. Attempt any **four** from the parts (a) to (e) in this question. 6×4

इस प्रश्न में भाग (a) से (e) में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए।

(a) (i) Prove that any set of k vectors in R^n is linearly dependent if $k > n$.

सिद्ध कीजिए कि में k सदिशों का कोई भी समुच्चय रैखिकत : निर्भर (linearly dependent) होता है यदि $k > n$.

(ii) Under what conditions is the lower triangular matrix of order $n \times n$ invertible? Prove, for a lower triangular matrix of order 3×3, that if the inverse exists, the inverse is also a lower triangular matrix.

किन शर्तों के अधीन $n \times n$ क्रम का एक निम्न त्रिकोणात्मक आव्यूह (lower triangular matrix) प्रतिलोमनीय (invertible) होता है ? सिद्ध कीजिए कि एक आर्डर 3×3 निम्न त्रिकोणात्मक मैट्रिक्स के लिए यदि प्रतिलोम (inverse) का अस्तित्व है, तो वह भी निम्न त्रिकोणात्मक होगा।

(b) (i) For what values of p does the system of equations :

$px + y + 4z = 2;\ 2x + y + p^2 z = 2;\ x - 3z = p$

have a unique, none or infinitely many solutions.

p के किन मानों हेतु समीकरण निकाय :

$px + y + 4z = 2;\ 2x + y + p^2 z = 2;\ x - 3z = p$

का अद्वितीय हल होगा, कोई हल नहीं होगा या अनन्त हल होंगे।

(ii) Replace the vector of constants (2, 2, p) in part (i) above by (b_1, b_2, b_3) to state a necessary and sufficient condition for the new system of equations to have infinitely many solutions.

उपरोक्त भाग (i) में स्थिरांकों के सदिश (2, 2, p) के स्थान पर (b_1, b_2, b_3) लीजिए व इस नए समीकरण निकाय के अनन्त हल होने हेतु आवश्यक व पर्याप्त शर्तों को लिखिए।

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(c) The 5000 consumers of a product are equally divided between brand A and brand B this year. However each year 10% of brand A consumers of the previous year shift to brand B whereas 20% of brand B consumers of the previous year shift to brand A. The total number of consumers remain fixed. Set out the problem in matrix form to answer the following :

इस वर्ष एक उत्पाद के 5000 उपभोक्ता ब्रांड A व ब्रांड B में विभाजित हैं। प्रतिवर्ष ब्रांड A के पिछले वर्ष के उपभोक्ताओं में से 10% ब्रांड B पर चले जाते हैं जबकि ब्रांड B के पिछले वर्ष के उपभोक्ताओं में से 20% ब्रांड A पर चले जाते हैं। उपभोक्ताओं की कुल संख्या स्थिर रहती हैं। इस समस्या को आव्यूहों के रूप में लिखिए व इसकी सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) What is the proportion of brand A consumers after 2 years ?

2 वर्षों बाद ब्रांड A के उपभोक्ताओं का अनुपात क्या होगा ?

(ii) What was the proportion of brand A consumers last year ?

पिछले वर्ष ब्रांड A के उपभोक्ताओं का अनुपात क्या था ?

(d) (i) The plane P is perpendicular to the straight line $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{2}$ and passes through (1, 5, 7). Find the equation of the plane P.

समतल (plane) P, रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{2}$ के लम्बवत् (perpendicular) है तथा (1, 5, 7) से गुजरती है। समतल P का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) If $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are vectors of unit length, under what circumstances is the length of their difference equal to 2 ?

यदि $\bar{x}$ व $\bar{y}$ इकाई लम्बाई के दो सदिश हैं, तो किन परिस्थितियों में इनके अन्तर की लम्बाई 2 के बराबर होगी ?

(e) (i) How many different matrices of order 3×3 can be formed that are both diagonal and idempotent ?

क्रम 3×3 के ऐसे कितने अलग-अलग आव्यूह बनाए जा सकते हैं जो कि विकर्णात्मक (diagonal) भी हों व आइडेम्पोटट (idempotent) भी ?

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(ii) Describe the set of vectors spanned by the set of vectors A, B and C, where :

सदिशों A, B व C, द्वारा पाटे गए (spanned) सदिशों के समुच्चय का वर्णन कीजिए जहाँ :

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\9\\8\end{pmatrix}\right\};\ B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\17\\21\end{pmatrix}\right\};$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. Attempt any **two** from the parts (a) to (c) in this question. 5×2

इस प्रश्न में भाग (a) से (c) में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए।

(a) (i) Specify the domain and provide a rough sketch of it for the function $f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)$. Also provide a rough sketch of the level curve at the height 4.

फलन $f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)$ का परास लिखिए व उसका एक रेखाचित्र बनाइए। ऊँचाई 4 पर इसके स्तर वक्र को भी आरेखित कीजिए।

(ii) State three different necessary and sufficient conditions for concavity of a function f(x, y) that is continuously differentiable of order 2 and is defined on a convex domain.

एक उत्तल परास (convex domain) पर परिभाषित व क्रम 2 के सतत: अवकलनीय (continuously differentiable) फलन f(x, y) की अवतलता (concavity) हेतु तीन अलग-अलग आवश्यक व पर्याप्त शर्तें लिखिए।

(b) (i) For the surface defined by the differentiable function $z=F\left(x,\frac{y}{x}\right)$, show that the tangent plane at (x_1, y_1) intersects the z axis at

$$z=F\left(x_1,\frac{y_1}{x_1}\right)-F'_x\left(x_1,\frac{y_1}{x_1}\right)x_1$$

अवकलनीय फलन $z=F\left(x,\frac{y}{x}\right)$, द्वारा परिभाषित सतह (surfae) हेतु दर्शाइए कि पर स्पर्शी समतल (tangent plane) z अक्ष को $z=F\left(x_1,\frac{y_1}{x_1}\right)-F'_x\left(x_1,\frac{y_1}{x_1}\right)x_1$ पर प्रतिच्छेदित (intersect) करता है।

 P.T.O.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(ii) Draw a sketch of the level curve(s) to the function $f(x,y)=\frac{2y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$ at the height 3 cm or m. Is the function homothetic ?

फलन $f(x,y)=\frac{2y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$ के ऊँचाई 3 cm or m पर स्तर वक्र (वक्रों) को आरेखित कीजिए। क्या यह फलन होमोथेटिक (homothetic) है ?

(c) The temperature at a point (x, y) on a metal plate in the X–Y plane is $T(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

X–Y समतल में धातु की एक प्लेट के बिन्दु (x, y) पर तापमान $T(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ है।

(i) Find the rate of change of temperature at (1,1) in the direction (2,–1).

(1,1) पर दिशा (2,–1) में तापमान के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(ii) An ant at (1,1) wishes to walk in the direction in which the temperature drops most rapidly. Write down the unit vector in that direction.

(1,1) पर स्थित एक चींटी उस दिशा में चलना चाहती है जिसमें तापमान सबसे तेजी से गिरता है। इस दिशा में इकाई सदिश लिखिए।

3. Attempt any **two** from the parts (a) to (c) in this question. 6×2

इस प्रश्न में भाग (a) से (c) में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए।

(a) Given that the function f (x, y) is homogenous of degree *p*, show that $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ and $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ are homogenous of degree p–1 . Using this, or otherwise, prove that $x^2f''_{xx}+2xyf''_{xy}+y^2f''_{yy}=p(p-1)f(x,y)$

दिया हुआ है कि फलन f (x, y) कोटि p का समघात है, तो दर्शाइए कि $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ व $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ कोटि p–1 के समघात हैं। इसकी सहायता से, या अन्यथा सिद्ध कीजिए कि $x^2f''_{xx}+2xyf''_{xy}+y^2f''_{yy}=p(p-1)f(x,y)$

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(b) (i) State the implicit function theorem.

परोक्ष फलन प्रमेय (implicit function theorem) को लिखिए।

(ii) The function $f(x, y, z, u, v) : \Re^5 \to \Re^2$ is defined by the system of two equations : $u^3yz + 2xv - u^2 v^2 - 2 = 0$; and $xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0$, has a solution at $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Find the values of the endogenous variables u and v when $x = 1.02, y = 0.99$, and $z = 1$.

फलन $f(x, y, z, u, v) : \Re^5 \to \Re^2$ जो कि दो समीकरणों के निकाय: $u^3yz + 2xv - u^2 v^2 - 2 = 0$; व $xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0$, से परिभाषित है, का $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ पर एक हल है। जब $x = 1.02, y = 0.99$, व $z = 1$ हों तो अन्तर्जात चरों (endogenous variables) u व v के मान ज्ञात कीजिए।

(c) State the definition for a quasi-concave function. Use the definition to test whether the following three functions are quasi-concave :

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = \sqrt{x}$ (iii) $h(x, y) = x^2 y$

एक अर्ध अवतल (quasi-concave) फलन की परिभाषा लिखें। इस परिभाषा के इस्तेमाल से निम्नलिखित तीन फलनों के अर्ध अवतल होने का परीक्षण करें।

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x)\ \sqrt{x}$ (iii) $h(x, y) = x^2 y$

4. Attempt any **three** from the parts (a) to (d) in this question. 7×3

इस प्रश्न में भाग (a) से (d) में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए।

(a) Derive the conditions on α, β under which the function $f(x,y) = 2x^{\alpha}y^{\beta}, \alpha, \beta > 0$ defined on the domain $x \geq 0, y \geq 0$ is :

α, β पर उन शर्तों को व्युत्पन्न कीजिए जिनके अधीन, परास $x \geq 0, y \geq 0$ पर परिभाषित फलन $f(x,y) = 2x^{\alpha}y^{\beta}, \alpha, \beta > 0$.

(i) Strictly Concave

सख्तत: अवतल (Strictly Concave) है

P.T.O.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(ii) Concave

अवतल (Concave) है

(iii) Quasi-concave

अर्द्ध-अवतल (Quasi-Concave) है

(iv) Convex

उत्तल (Convex) है।

(b) State the sufficient conditions for a function to possess both a global maxima and a global minima in its domain.

Find the global extreme points for the function $f(x, y) = x^2y^3$ defined on the set $\{(x,y) \mid x \geq 1, y \geq 2, x + y \leq 10\}$.

एक फलन के परास में वैश्विक उच्चिष्ठ (global maxima) व वैश्विक निम्निष्ठ (global minima) दोनों होने हेतु आवश्यक शर्तों को लिखिए।

समुच्चय $\{(x,y) \mid x \geq 1, y \geq 2, x + y \leq 10\}$ पर परिभाषित फलन $f(x, y)$ x^2y^3 के वैश्विक चरम बिन्दु (extreme points) ज्ञात कीजिए।

(c) Find all stationary points of the function $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy - 2x^2 + x - y + 4$ classify the stationary points as maxima, minima and saddle points.

फलन $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy - 2x^2 + x - y + 4$ के सभी स्थिर बिन्दु (stationary points) ज्ञात कीजिए। इन बिन्दुओं को उच्चिष्ठ (maxima), निम्निष्ठ (minima) या काठी बिन्दु (saddle points) के तौर पर वर्गीकृत कीजिए।

(d) A point moves on the curve $x^2 + y^2 = 100$. At what point is its distance from the point $(x, y) = (10, 8)$ minimum ? If the constant 100 in the equation of the curve were to be increased by one unit, what is the instantaneous effect on the minimum distance.

एक बिन्दु वक्र $x^2 + y^2 = 100$ पर गति करता है। किस बिन्दु पर बिन्दु $(x, y) = (10, 8)$ से इसकी दूरी न्यूनतम होगी ? यदि वक्र के समीकरण के स्थिर मान 100 को एक इकाई से बढ़ा दिया जाए तो इस न्यूनतम दूरी पर तात्क्षणिक (instantaneous) प्रभाव क्या होगा ?

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

5. Attempt any **two** from the parts (a) to (c) in this question. 4×2

इस प्रश्न में भाग (a) से (c) में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए।

(a) Consider the differential equation $\frac{dy}{dt}=k\left(1-\frac{y}{m}\right)y$ where k and m are positive constants. Draw a phase line to determine if the equation possesses a stable equilibrium.

अवकल समीकरण (differential equation) $\frac{dy}{dt}=k\left(1-\frac{y}{m}\right)y$ पर विचार कीजिए जहाँ k व m धनात्मक स्थिरांक हैं। क्या इस समीकरण की स्थायी साम्यावस्था का अस्तित्व है, इसका निर्धारण करने हेतु एक प्रावस्था रेखा (phase line) को आरेखित कीजिए।

(b) Two sets A and B in $\Re^2$ are defined as $A=\{(x, y) \mid xy \geq 10\}$ and $B=\{(x, y) \; 2x^2+y \leq 0\}$. Draw a sketch of the sets to decide :

$\Re^2$ में दो समुच्चय $A=\{(x, y) \mid xy \geq 10\}$ व $B=\{(x, y) \; 2x^2+y \leq 0\}$ द्वारा परिभाषित हैं। इन समुच्चयों के आरेख बनाइए व उन आरेखों की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) whether the sets A and B are closed and bounded.

क्या समुच्चय A व B बन्द (closed) व परिबद्ध (bounded) हैं।

(ii) whether the set $A \cap B$ is convex.

क्या समुच्चय $A \cap B$ उत्तल (convex) है।

(c) Show that $x(t)=Ce^{5t}+\frac{3}{5}$ is a solution to the differential equation $\frac{dx}{dt}=5x-3$. Find the integral curve when x(2) = 1 .

दर्शाइए कि $x(t)=Ce^{5t}+\frac{3}{5}$, अवकल समीकरण $\frac{dx}{dt}=5x-3$ का एक हल है। जब x(2) = 1 हो, तो समाकल वक्र (integral curve) ज्ञात कीजिए।

3500

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com